4. ELEMENTE DE TEORIA RELATIVITĂȚII RESTRÂNSE

4.1. Bazele fizice ale teoriei relativității

Orice fenomen din natură trebuie studiat într-un sistem de referință. Cele mai simple sisteme de referință sunt sistemele de referință inerțiale, sisteme în care am văzut că spațiul este omogen și izotrop iar timpul uniform. Dacă un sistem de referință K este inerțial atunci orice alt sistem de referință K' care se mișcă față de acesta cu viteză constantă $\vec{V}$ (adică rectiliniu și uniform) este tot un sistem de referință inerțial.

Am văzut că un principiu fundamental al fizicii clasice îl reprezintă principiul relativității a lui Galilei. Conform acestui principiu legile naturii sunt aceleași în orice sistem de referință inerțial (am analizat acest lucru în cadrul mecanicii newtoniene). Cu alte cuvinte legile fizice sunt invariante la transformările Galilei, care leagă coordonatele și timpul la trecerea de la un sistem de referință inerțial la altul.

Fie $(\vec{r}, t) \leftrightarrow (x, y, z, t)$ coordonatele în sistemul de referință inerțial K și $(\vec{r}\,', t') \leftrightarrow (x', y', z', t')$ coordonatele (incluzând și timpul) în sistemul de referință inerțial K'.

Dacă $\vec{V}$ este viteza cu care se deplasează sistemul K' față de K avem transformările Galilei sub forma

$$\begin{cases} \vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{V} t \\ t' = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - V_x t \\ y' = y - V_y t \\ z' = z - V_z t \\ t' = t \end{cases} \qquad (1)$$

sau invers (la trecerea de la K' la K)

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}\, t' \\ t = t' \end{cases} \iff \begin{cases} x = x' + v_x t' \\ y = y' + v_y t' \\ z = z' + v_z t' \\ t = t' \end{cases} \qquad (2)$$

Remarcăm transformarea timpului, care arată caracterul absolut al acestuia în fizica clasică, adică acesta curge la fel în toate sistemele de referință.
Adică dacă două evenimente sunt simultane într-un sistem de referință ele rămân simultane în orice alt sistem de referință.
Caracterul absolut al timpului este legat și de faptul că în fizica clasică (până la sfârșitul secolului XIX) interacțiunea se considera a se propaga instantaneu. Așadar fizica clasică postulează caracterul absolut al timpului.
La sfârșitul secolului XIX câmpul electromagnetic era descris complet prin ecuațiile lui Maxwell (le vom introduce ceva mai târziu). Din ecuațiile lui Maxwell se pot stabili (în condiții concrete) ecuațiile undelor electromagnetice care se dovedesc a nu mai fi invariante la transformările Galilei.
Pe de altă parte existența undelor electromagnetice a ridicat problema stabilirea mediului în care se propagă acestea (deoarece undele electromagnetice se propagă și absența substanței, adică în vid)
Acest mediu ipotetic a fost numit eter.
Pe de altă parte era lămurit faptul că lumina este undă electromagnetică (cu frecvență din spectrul vizibil)
Câteva experiențe de la sfârșitul secolului XIX conduceau la rezultate care nu puteau fi explicate cu ajutorul bazelor teoretice ale fizicii clasice.
Experiențele lui Fizeau își propuneau determinarea vitezei luminii în medii transparente mobile.

Măsurătorile deveniseră la acea vreme suficient de precise datorită folosirii metodelor interferometrice. Aceste măsurători fost permite determinarea unor distanțe de ordinul lungimii de undă a luminii și timpului cu o precizie de ordinul perioadei (inversul frecvenței) undei luminoase.

Fizeau a determinat viteza luminii în medii transparente ce se deplasau cu viteza $\pm V$ și aveau indice de refracție n. Rezultatele experimentale au condus la rezultate în care viteza luminii în aceste medii este

$$u = \frac{c}{n} \pm V\left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \quad c\text{-viteza luminii în vid.} \tag{3}$$

Pe baza legii de compunere al vitezelor din mecanica clasică rezultatul trebuia să fie

$$u = \frac{c}{n} \pm V. \tag{4}$$

Adică apare o contradicție cu principiile teoretice clasice.

Un alt experiment celebru a fost efectuat de Michelson și Morley (1881). Un astfel de experiment studia propagarea luminii pe o direcție paralelă cu viteza de deplasare a Pământului și pe o direcție perpendiculară pe aceasta. Fără a intra în detaliile acestui experiment, care de asemenea utiliza metode interferometrice de măsurare (interferometrul Michelson), explicarea rezultatelor acestuia trebuia să introducă o ipoteză suplimentară (contracția Lorentz) conform căreia dimensiunile longitudinale (în lungul vitezei Pământului) suferă o contracție care s-a stabilit a fi de forma $L(v) = L_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. (5)

Apărea astfel necesitatea unei reformulări ale principiilor fundamentale din mecanica clasică.

4.2. Principiile relativității restrânse

Toate aceste rezultate experimentale au condus la o reformulare a principiilor fundamentale ale fizicii clasice.
În anul 1905 fizicianul german Albert Einstein a postulat două principii fundamentale (la care s-a mai adăugat un al treilea) ale teoriei relativității restrânse. Teoria relativității restrânse studiază fenomenele fizice doar în sisteme de referință inerțiale.

1. Principiul relativității: Legile naturii sunt aceleași în orice sistem de referință inerțial.

2. Principiul constantei vitezei luminii: Viteza luminii în vid are aceeași valoare (constantă) în toate sistemele de referință inerțiale în toate direcțiile. Ea nu depinde de viteza de deplasare a sursei de lumină.

Observație: Primul principiu de fapt reafirmă principiul relativității galileene. Totuși după cum vom vedea al doilea principiu va conduce la o teorie a relativității care diferă mult de teoria clasică (nerelativistă) newtoniană.
În primul rând putem remarca faptul că interacția nu se mai propagă instantaneu la distanță ci din aproape în aproape cu o viteză maximă care este viteza luminii în vid c ($c \approx 300.000 km/s$)
Pe de altă parte fizica clasică nu trebuie negată complet ci reobținută în limita vitezelor mici comparativ cu viteza luminii în vid. Astfel a mai fost introdus un principiu.

3. Principiul corespondenței: Toate rezultatele teoriei relativității trebuie să coincidă cu cele ale mecanicii clasice în limita vitezelor foarte mici $\frac{v}{c} \to 0$, sau echivalent în limita $c \to \infty$.

Vom vedea în continuare modificare fundamentală la nivelul conceptelor este aceea că timpul nu mai este absolut în teoria relativității (devine relativ).

Două evenimente simultane într-un sistem de referință pot să nu mai fie simultane în alt sistem de referință inerțial.

Caracterul relativ al spațiului există și în mecanica clasică.

4.3. Interval 4-dimensional. Spațiul Minkowski

Numim eveniment un fapt fizic ce se petrece într-un punct din spațiu la un moment dat.

Dacă introducem un spațiu 4-dimensional în care un punct este reprezentat prin coordonatele (x, y, z, ct), atunci unui eveniment îi va corespunde un punct din acest spațiu, numit punct de univers. Spațiul 4-dimensional definit anterior se numește spațiu Minkowski. Mișcarea unui punct material este descrisă în spațiul Minkowski printr-o curbă numită linie de univers.

Remarcăm faptul că în teoria relativității spațiul și timpul sunt puse pe picior de egalitate.

Considerăm două evenimente:

- lansarea din punctul (x_1, y_1, z_1) la momentul t_1 a unui semnal luminos
- recepționarea acestui semnal luminos în punctul (x_2, y_2, z_2) la momentul t_2 în același sistem de referință inerțial K.

Distanța dintre cele două puncte este

$$l_{12} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}, \qquad (6)$$

care este parcursă de lumină în vid cu viteza c, adică $l_{12} = c(t_2-t_1)$ (7)

Din (6) și (7) obținem relația

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} = c(t_2-t_1)$$

care poate fi pusă sub forma

$$c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2 \qquad (8)$$

Analizăm cele două evenimente într-un alt sistem de referință inerțial, notat K'. Utilizăm acum principiul constanței vitezei luminii în vid ceea ce înseamnă că și în acest sistem de referință viteza luminii este tot c $(c'=c)$.
Obținem astfel o relație similară cu (8)

$$c^2(t_2'-t_1') - (x_2'-x_1')^2 - (y_2'-y_1')^2 - (z_2'-z_1')^2 = 0 \qquad (9)$$

Vom introduce acum noțiunea de interval 4-dimensional, notat s_{12}^2,

$$s_{12}^2 = c^2(t_2-t_1)^2 - (x_2-x_1)^2 - (y_2-y_1)^2 - (z_2-z_1)^2 \qquad (10)$$

Constatăm că $s_{12}^2=0$ atât în K cât și în K' ($s'^2_{12}=0$), relativ la propagarea luminii în vid.

Vom arăta în continuare ca intervalul astfel definit are aceeași valoare în orice sistem de referință chiar și atunci când (este un invariant) este diferit de zero.

Vom introduce intervalul 4-dimensional infinitezimal, luând $t_2=t_1+dt$, $y_2=y_1+dt$, $z_2=z_1+dt$, $x_2=x_1+dt$. Avem (din 10)

$$ds^2 = c^2(dt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \qquad (11)$$

Considerăm acum sistemul de referință inerțial K' care se mișcă față de K cu viteza $\vec{V}$. Notăm cu ds'^2 intervalul în K'.

Am văzut că dacă $ds^2=0$, el descrie propagarea luminii în vid, atunci și $ds'^2=0$. Cum cele două intervale au fost alese infinitezimale cea mai generală legătură dintre acestea, care să țină cont de implicația precizată mai sus, este

$$ds'^2 = a(\vec{r}, t, \vec{V})\, ds^2 \qquad (12)$$

Evident $ds^2=0 \Rightarrow ds'^2=0$. $\vec{r}$ și t determină poziția și momentul în K în ~~jurul~~ căruia se evaluează intervalul 4-dimensional.

Spatiul este omogen în sistemele de referință inerțiale (are aceleași proprietăți în orice punct).
În consecință a nu va depinde de $\vec{r}$. Timpul de asemenea este uniform într-un sistem de referință, deci a nu va depinde nici de t.
Spatiul este izotrop, adică are aceleași proprietăți în toate direcțiile, deci a nu depinde de direcția lui $\vec{V}$ ci doar de modulul acestuia $|\vec{V}| \equiv V$. Relația (12) se rescrie astfel

$$ds'^2 = a(|\vec{V}|)\, ds^2 \qquad (13)$$

Considerăm acum sistemele de referință inerțiale K_1 și K_2 care se mișcă față de K cu vitezele $\vec{V}_1$ respectiv $\vec{V}_2$, având direcții arbitrare. Notăm $\vec{V}_{12}$ viteza cu care se mișcă K_2 față de K_1. Aplicăm relația (13) în aceste trei cazuri

$$ds_1^2 = a(|\vec{V}_1|)\, ds^2$$
$$ds_2^2 = a(|\vec{V}_2|)\, ds^2 \qquad (14)$$
$$ds_2^2 = a(|\vec{V}_{12}|)\, ds_1^2$$

Împărțim primele două egalități și obținem

$$\frac{ds_2^2}{ds_1^2} = \frac{a(|\vec{V}_2|)}{a(|\vec{V}_1|)} = a(|\vec{V}_{12}|) \qquad (15)$$

Primul membru al ultimei egalități depinde doar de $|\vec{V}_1|$ și $|\vec{V}_2|$, pe când membrul drept depinde de $|\vec{V}_{12}|$, care la rândul său depinde $|\vec{V}_1|$, $|\vec{V}_2|$ dar în plus și de unghiul dintre θ dintre $\vec{V}_1$ și $\vec{V}_2$. Așadar avem egalitatea (15) care trebuie să aibă loc $\forall\ \vec{V}_1, \vec{V}_2$, adică $\forall \theta$. În concluzie pentru a fi satisfăcută această egalitate a trebuie să fie constant $a = \text{const} \equiv a_0$

Rescriem (15)

$$\frac{a_0}{a_0} = a_0 \qquad (16)$$

de unde evident $a \equiv a_0 = 1$

Așadar (13) conduce la

$$ds^2 = ds'^2 \qquad (17)$$

care arată că intervalul 4-dimensional infinitezimal este invariant. Însumând (integrând) între două puncte de univers obținem imediat

$$s_{12}^2 = s_{12}'^2 \qquad (18)$$

adică și intervalul 4-dimensional finit este invariant la trecerea de la un sistem de referință inerțial la altul.

Dacă $s_{12}^2 = 0$ intervalul se numește luminos, după cum am văzut descrie propagarea luminii.

Dacă $s_{12}^2 > 0$ intervalul se numește temporal.

Dacă $s_{12}^2 < 0$ intervalul se numește spațial.

Remarcăm faptul că două evenimente simultane într-un sistem de referință nu mai sunt simultane în altul.

Dacă $t_2 = t_1$ $\quad s_{12}^2 = -(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2$.

Dar $s_{12}'^2 = c^2(t_2'-t_1')^2-(x_2'-x_1')^2-(y_2'-y_1')^2-(z_2'-z_1')^2$ și $s_{12}'^2 = s_{12}^2$ și obținem $-(\vec{r}_2-\vec{r}_1)^2 = c^2(t_2'-t_1')^2-(\vec{r}_2{}'-\vec{r}_1{}')$ care poate admite soluții $t_2' \neq t_1'$.

4.4. Transformări Lorentz

Inițial vom stabili forma generală a transformărilor de coordonate în spațiul Minkowski care păstrează valoarea și forma intervalului.

Am văzut că invarianța intervalului este esențială în teoria relativității restrânse, aceasta decurgând direct din principiile relativității.

Am văzut de asemenea că timpul nu mai este absolut în teoria relativității, în schimb remarcăm caracterul absolut al intervalului (care este construit atât cu timpul cât și cu coordonatele spațiale).

Vom rescrie intervalul (4-dimensional) într-o formă compactă mai convenabilă.

Introducem notațiile $ct = x^0$, $x = x^1$, $y = x^2$, $z = x^3$.

De asemenea introducem ceea ce se numește metrica (tensorul metric) Minkowski, definită astfel

$$g_{\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \mu = \nu = 0 \\ -1, & \mu = \nu = 1,2,3 \\ 0, & \mu \neq \nu \end{cases}, \quad g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \qquad (19)$$

Intervalul relativist (4-dimensional) infinitezimal se poate scrie astfel

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu, \qquad (20)$$

cu în însumare după μ și ν (când indicii $\mu, \nu, \ldots$ se repetă sus-jos se subînțelege o sumare după aceștia - convenția Einstein).

Indicii $\mu, \nu, \ldots$ poartă numele de indici Lorentz. Coordonatele spațio-temporale se scriu compact x^μ. Dacă $\mu = 0 \Rightarrow x^0 = ct$. Dacă $\mu = 1,2,3 \overset{\text{not}}{\equiv} i$ x^i - coordonate spațiale $(x^1, x^2, x^3) \leftrightarrow (x, y, z)$

Revenind la intervalul relativist infinitezimal (20) să scriem forma explicită a acestuia. În urma însumării după μ și ν de la 0 la 3 singurele valori diferite de zero ale lui $g_{\mu\nu}$ sunt $g_{00} = 1$, $g_{11} = -1$, $g_{22} = -1$, $g_{33} = -1$.

Obținem $ds^2 = g_{00}\, dx^0 dx^0 + g_{11}\, dx^1 dx^1 + g_{22}\, dx^2 dx^2 + g_{33}\, dx^3 dx^3 = 1\, d(ct)^2 + (-1)\, dx^2 + (-1)\, dy^2 + (-1)\, dz^2$.

Sau în final $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$, adică tocmai forma intervalului infinitezimal (11).

Metrica Minkowschi poate fi reprezentată și matricial

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (21)$$

Să considerăm o transformare de coordonate generală

$$x'^\mu = x'^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3), \quad \mu = 0,1,2,3, \qquad (22)$$

sau scrisă mai compact

$$x'^\mu = x'^\mu(x^\mu). \qquad (23)$$

O astfel de transformare trebuie să lase invariant intervalul relativist.

$$ds'^2 = ds^2 \iff g_{\mu\nu}\, dx'^\mu dx'^\nu = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta \qquad (24)$$

Dar din (23) obținem

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \qquad (25)$$

și introducând în (24) avem egalitatea

$$g_{\mu\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} dx^\beta = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta. \qquad (26)$$

Cum aceasta are loc $\forall\, dx^\alpha, dx^\beta$ obținem

$$g_{\mu\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} = g_{\alpha\beta}. \qquad (27)$$

Introducem notația $\Lambda^\mu{}_\alpha \overset{\text{not}}{\equiv} \dfrac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}$ (28)

cu ajutorul căreia (27) devine

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta}. \qquad (29)$$

Pe de altă parte transformările de coordonate trebuie să fie liniare, adică (22-23) scrise explicit au forma

$$\begin{aligned}
x'^0 &= a^0{}_0 x^0 + a^0{}_1 x^1 + a^0{}_2 x^2 + a^0{}_3 x^3 + b^0 \\
x'^1 &= a^1{}_0 x^0 + a^1{}_1 x^1 + a^1{}_2 x^2 + a^1{}_3 x^3 + b^1 \\
x'^2 &= a^2{}_0 x^0 + a^2{}_1 x^1 + a^2{}_2 x^2 + a^2{}_3 x^3 + b^2 \\
x'^3 &= a^3{}_0 x^0 + a^3{}_1 x^1 + a^3{}_2 x^2 + a^3{}_3 x^3 + b^3
\end{aligned} \qquad (30)$$

sau compact

$$x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu + b^\mu \qquad (31)$$

cu $a^\mu{}_\nu$, b^μ constante.

Liniaritatea cerută este justificată prin faptul că la un eveniment într-un sistem de coordonate trebuie să corespundă un singur eveniment în orice alt sistem de coordonate, adică la un eveniment într-un sistem de referință inerțial să corespundă un singur eveniment în orice alt sistem de referință inerțial.

Derivând x'^{μ} în (31) în raport cu x^{ν} obținem

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = a^{\mu}{}_{\nu} \equiv \Lambda^{\mu}{}_{\nu}$$

Astfel obținem forma generală a transformărilor de coordonate în spațiul Minkowski

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu} \qquad (32)$$

Aceste transformări poartă numele de transformări Lorentz - Poicare. Coeficienții constanți (parametrii) a^{μ} reprezintă o schimbare a originii sistemului de coordonate.

Dacă $a^{\mu}=0$ obținem transformările Lorentz sub formă generală (originile lui K și K' coincid la t=0)

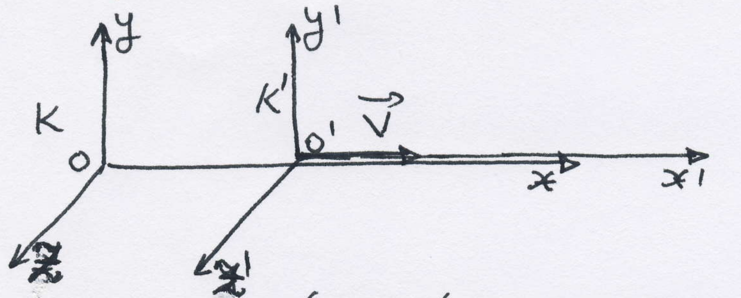
$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \qquad (33)$$

Evident trecerea de la un sistem de referință la altul este echivalent cu o transformare Lorentz.

Evident $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ vor depinde de viteza $\vec{V}$ de deplasare a lui K' față de K.

4.4.1. Transformări Lorentz speciale

Vom determina forma transformărilor Lorentz (3) pentru o situație geometrică particulară și simplificatoare. Vom presupune că transformările (33) fac legătura între coordonatele unui punct în sistemul de referință K și sistemul de referință K', atunci când K' se mișcă față de K în lungul axei Ox cu viteza V. De asemenea presupunem că axele lui K' și K rămân mereu paralele.



Transformările Lorentz se scriu acum explicit mai simplu

$$\begin{cases} x'^0 = \Lambda^0{}_0 x^0 + \Lambda^0{}_1 x^1 \\ x'^1 = \Lambda^1{}_0 x^0 + \Lambda^1{}_1 x^1 \\ x'^2 = x^2 \\ x'^3 = x^3 \end{cases} \qquad (34)$$

Condiția de invarianță a intervalului relativist (29) se scrie:

pentru $\alpha = 0$, $\beta = 0$

$$g_{00}\Lambda^0{}_0\Lambda^0{}_0 + g_{11}\Lambda^1{}_0\Lambda^1{}_0 = g_{00} \Leftrightarrow (\Lambda^0{}_0)^2 - (\Lambda^1{}_0)^2 = 1$$

pentru $\alpha = 1$, $\beta = 1$

$$g_{00}\Lambda^0{}_1\Lambda^0{}_1 + g_{11}\Lambda^1{}_1\Lambda^1{}_1 = g_{11} \Leftrightarrow (\Lambda^0{}_1)^2 - (\Lambda^1{}_1)^2 = -1$$

pentru $\alpha = 1$, $\beta = 0$

$$g_{00}\Lambda^0{}_1\Lambda^0{}_0 + g_{11}\Lambda^1{}_1\Lambda^1{}_0 = g_{10} \Leftrightarrow \Lambda^0{}_1\Lambda^0{}_0 - \Lambda^1{}_1\Lambda^1{}_0 = 0$$

pentru $\alpha = 0$, $\beta = 1$

$$g_{00}\Lambda^0{}_0\Lambda^0{}_1 + g_{11}\Lambda^1{}_0\Lambda^1{}_1 = g_{01} \Leftrightarrow \Lambda^0{}_0\Lambda^0{}_1 - \Lambda^1{}_0\Lambda^1{}_1 = 0$$

Observăm că ultimele două egalități sunt identice și în consecință avem trei relații independente

$$\begin{cases} (\Lambda^0{}_0)^2 - (\Lambda^1{}_0)^2 = 1 \\ (\Lambda^0{}_1)^2 - (\Lambda^1{}_0)^2 = -1 \\ \Lambda^0{}_0\Lambda^0{}_1 - \Lambda^1{}_0\Lambda^1{}_1 = 0 \end{cases} \qquad (35)$$

independente între cei patru parametrii Lorentz necunoscuți: $\Lambda^0{}_0$, $\Lambda^1{}_0$, $\Lambda^0{}_1$, $\Lambda^1{}_1$.

Alegem ~~pentru~~ parametrii de mai sus următoarea formă:

$$\Lambda^0{}_0 = \operatorname{ch}\alpha_1 \qquad \Lambda^1{}_0 = \operatorname{sh}\alpha_1$$

$$\Lambda^0{}_1 = \operatorname{sh}\alpha_2 \qquad \Lambda^1{}_1 = \operatorname{ch}\alpha_2$$

Această alegere se face astfel încât primele două ecuații din (35) să fie satisfăcute identic.

Intradevăr
$$(\Lambda^0{}_0)^2-(\Lambda^1{}_0)^2 = ch^2\alpha_1 - sh^2\alpha_1 \equiv 1$$
și
$$(\Lambda^0{}_1)^2-(\Lambda^1{}_1)^2 = sh^2\alpha_2 - ch^2\alpha_2 \equiv -1$$
Observație: Am folosit:
$$sh\,\alpha = \frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2} \quad \text{și } ch\,\alpha = \frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}$$
$$(ch\,\alpha)^2-(sh\,\alpha)^2 = \left(\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}\right)^2 =$$
$$= \frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}+e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}\cdot\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}-e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2} = e^{\alpha}\cdot e^{-\alpha} = 1$$
Cerem să fie satisfăcută și a treia ecuație din (35) și găsim
$$ch\,\alpha_1\, sh\,\alpha_2 - sh\,\alpha_1\, ch\,\alpha_2 \equiv sh(\alpha_2-\alpha_1) = 0$$
Observație: ultima identitate se demonstrează prin calcul direct ca și în cazul anterior.

Din $sh(\alpha_2-\alpha_1)=0$ obținem $\dfrac{e^{\alpha_2-\alpha_1}-e^{-(\alpha_2-\alpha_1)}}{2}=0$,

sau $e^{\alpha_2-\alpha_1} = e^{\alpha_1-\alpha_2} \Rightarrow \alpha_2-\alpha_1=\alpha_1-\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2=\alpha_1 \overset{not}{\equiv} \alpha$

Legăm acum parametrul α de viteza V.

Vom scrie coordonatele lui O' în sistemul K:

$x^0=ct$, $x^1\equiv x = Vt$, $x^2\equiv y=0$, $x^3\equiv z=0$

In K' O' are coordonatele

$x'^0=ct'$, $x'^1\equiv x'=0$, $x'^2\equiv y'=0$, $x'^3\equiv z'=0$

Așadar pentru O' transformările Lorentz (34) se scriu
$$\begin{cases} ct' = ch\,\alpha\cdot ct + sh\,\alpha\cdot Vt \\ 0 = sh\,\alpha\cdot ct + ch\,\alpha\cdot Vt \end{cases} \tag{36}$$
Din a doua egalitate obținem
$$\frac{sh\,\alpha}{ch\,\alpha} = -\frac{V}{c} \iff th\,\alpha = -\frac{V}{c}\,. \tag{37}$$
Putem acum determina $ch\,\alpha$ și $sh\,\alpha$ și apoi toți parametrii Λ.

Din $ch^2\alpha - sh^2\alpha = 1 \Rightarrow 1-th^2\alpha = \dfrac{1}{ch^2\alpha}$
$$\Rightarrow ch\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-th^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \Lambda^0{}_0 = \Lambda^1{}_1$$

$$\operatorname{sh}\alpha = \operatorname{ch}\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \Lambda'_0 = \Lambda^0{}_1$$

Putem acum scrie transformările Lorentz (34)

$$\begin{cases} ct' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\, ct - \dfrac{v}{c}\, \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\, x \\[2ex] x' = -\dfrac{v}{c}\, \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\, ct + \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\, x \\[2ex] y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Obținem forma finală a transformărilor (34) care se numesc transformări Lorentz speciale

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,(x - vt) \\[2ex] y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(t - \dfrac{v}{c^2}\, x\right) \end{cases} \qquad (36)$$

Dacă trecerea se face de la sistemul K' la K, în (36) facem schimbările $t' \leftrightarrow t$, $x' \leftrightarrow x$, $y' \leftrightarrow y$, $z' \leftrightarrow z$ și $\vec{V} \leftrightarrow -\vec{V}$ ($V \leftrightarrow -V$), și obținem transformările Lorentz speciale inverse

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,(x' + vt) \\[2ex] y = y' \\ z = z' \\ t = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{2}}}\left(t' + \dfrac{v}{c^2}\, x'\right) \end{cases} \qquad (37)$$

Remarcăm faptul că în limita $c \to \infty$ (Principiul corespondenței) reobținem transformările Galilei din mecanica clasică:

$$x = x' + vt\,,\quad y = y'\,,\quad z = z'\,,\quad t = t' \qquad (38)$$

4.4.2. Consecințele transformărilor Lorentz

- Dilatarea duratei (timpului)

Să presupunem că două evenimente au loc la momentele t_1', respectiv t_2' în același punct x' din K' care se deplasează cu viteza V față de K.

Intervalul de timp măsurat în K' este $\Delta t' = t_2' - t_1'$

Aceleași două evenimente sunt determinate din sistemul de referință inerțial K la momentele de timp t_2, respectiv t_1. Pe baza transformărilor Lorentz speciale inverse (37) avem

$$t_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(t_2' + \frac{V}{c^2}x'\right) \tag{39}$$

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(t_1' + \frac{V}{c^2}x'\right) \tag{40}$$

Scăzând ultimele două egalități obținem

$$t_2 - t_1 \equiv \Delta t = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(t_2' - t_1'\right)$$

sau

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\,\Delta t' \tag{41}$$

Se constată că $\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} < 1$ adică $\Delta t > \Delta t'$. Adică apare o dilatare a duratelor în sistemul de referință K (considerat fix) față de duratele măsurate în K' (considerat mobil, deplasându-se cu viteza V față de K)

Încă odată remarcăm faptul că timpul nu mai este absolut. În limita nerelativistă $c \to \infty$ reobținem $\Delta t = \Delta t'$, adică faptul că la limită timpul poate fi considerat absolut în mecanica clasică.

- Contracția lungimilor

Considerăm o distanță (lungime) măsurată în lungul axei Ox în sistemul de referință K, adică se determină x_1 respectiv x_2, la același moment t. Distanța (lungimea) măsurată în K este $\Delta x \equiv l = x_2 - x_1$.

Considerăm acum un sistem de referință K' în care punctele x_1 și x_2 sunt în repaus.

Din punct de vedere practic putem considera o riglă care se deplasează față de K cu o viteză v (în lungul riglei). Rigla se află în repaus față de K' (K' fiind atașat acesteia). În K' se „reperează" capetele și se obține x_1' respectiv x_2'. Evident distanța dintre cele două puncte (lungimea riglei) este $\Delta x' \equiv l_0 = x_2' - x_1'$. Scriem transformările Lorentz speciale directe (36) pentru x.

$$x_2' = \left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^{-1}(x_2 - vt)$$

$$x_1' = \left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^{-1}(x_1 - vt)$$

Scădem aceste relații și obținem

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

sau

$$l_0 = \frac{l}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \iff l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \qquad (42)$$

Așadar $l/l_0 = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < 1$, $\frac{l}{l_0} < 1$ și deci $l < l_0$. Aceasta reprezintă contracția Lorentz a lungimilor pe direcția de deplasare a acestora (observată experimental de către Michelson și Morley).

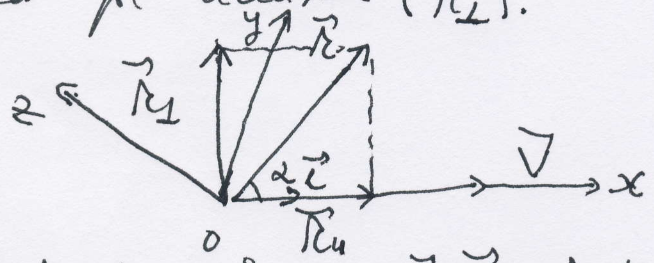
Aceasta ne arată că o „lungime" în mișcare are valoarea l_0 (numită lungime proprie) dacă este măsurată într-un sistem de referință atașat ei (adică în repaus) și o lungime $l (< l_0)$ contractată dacă se măsoară într-un sistem de referință față de care aceasta se deplasează

44.3. Forma generală a transformărilor Lorentz

Ne propunem să scriem forma generală a transformărilor Lorentz, adică atunci când sistemele de referință inerțiale K și K' se deplasează relativ cu o viteză $\vec{V}$ care nu mai este paralelă cu axele OX (OX'). Vom păstra totuși axele lui K și K' paralele.

Ne vom ajuta de transformările Lorentz speciale pe care le vom pune sub formă vectorială.

În general dacă avem un vector de poziție $\vec{r}$, acesta poate fi descompus într-o componentă paralelă cu viteza $\vec{V}$ ($\vec{r}_{\parallel}$) și o componentă perpendiculară pe aceasta ($\vec{r}_{\perp}$).



Putem scrie că: $\vec{r}\cdot\vec{V} = rV\cos\alpha = |\vec{r}_{\parallel}|\cdot V$, de unde $|\vec{r}_{\parallel}| = \dfrac{\vec{r}\cdot\vec{V}}{V}$, versorul direcției lui $\vec{r}_{\parallel}$ coincide cu versorul direcției lui $\vec{V}$, care este $\dfrac{\vec{V}}{V}$.

Așadar avem

$$\vec{r}_{\parallel} = \frac{\vec{r}\cdot\vec{V}}{V}\cdot\frac{\vec{V}}{V} = \frac{(\vec{r}\cdot\vec{V})}{V^2}\vec{V} \qquad (43)$$

Evident $\vec{r}_{\perp} + \vec{r}_{\parallel} = \vec{r}$ și deci

$$\vec{r}_{\perp} = \vec{r} - \vec{r}_{\parallel} = \vec{r} - \frac{\vec{r}\cdot\vec{V}}{V^2}\cdot\vec{V} \qquad (44)$$

Revenind la geometria transformărilor Lorentz speciale avem $\vec{r}_{\parallel} \equiv x\vec{i}$ și $\vec{r}_{\perp} = y\vec{j} + z\vec{k}$

În mod similar se poate scrie pentru vectorul de poziție din K' notat $\vec{r}'$.

Facem notația $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$ și rescriem transformările Lorentz speciale directe (36)

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - Vt), \; y' = y, \; z' = z & (45) \\ t' = \gamma\left(t' - \frac{V}{c^2}x\right) & (46) \end{cases}$$

Din (45) obținem:

$$\vec{r}\,' = \vec{i}x' + \vec{j}y' + \vec{k}z' = \gamma(\vec{i}x - \vec{i}Vt) + \vec{j}y + \vec{k}z =$$
$$= \gamma(\vec{r}_{\parallel} - \vec{V}t) + \vec{r}_{\perp} = \gamma\left(\frac{\vec{r}\cdot\vec{V}}{V^2}V - \vec{V}t\right) + \vec{r} - \frac{\vec{r}\cdot\vec{V}}{V^2}\cdot\vec{V}$$

sau $\vec{r}\,' = \gamma(\vec{r}_{\parallel} - \vec{V}t) + \vec{r} - \vec{r}_{\parallel} = \gamma(\vec{r} - \vec{V}t) + (1-\gamma)\vec{r} -$
$-(1-\gamma)\vec{r}_{\parallel} = \gamma(\vec{r} - \vec{V}t) + (1-\gamma)\vec{r}_{\perp}$

$$\vec{r}\,' = \gamma(\vec{r} - \vec{V}t) + (\gamma - 1)\left(\frac{\vec{r}\cdot\vec{V}}{V^2}\vec{V} - \vec{r}\right) \qquad (47)$$

Din (46) obținem ($\vec{V}\cdot\vec{r} = Vx$)

$$t' = \gamma\left(t - \frac{1}{c^2}\vec{r}\cdot\vec{V}\right) \qquad (48)$$

Dacă folosim și relația vectorială

$$\vec{V}\times(\vec{V}\times\vec{r}) = \vec{V}(\vec{V}\cdot\vec{r}) - \vec{r}(\vec{V}\cdot\vec{V}) = (\vec{r}\cdot\vec{V})\vec{V} - \vec{r}\cdot V^2$$

adică $\frac{\vec{r}\cdot\vec{V}}{V^2}\vec{V} - \vec{r} = \frac{1}{V^2}\left((\vec{r}\vec{V})\vec{V} - \vec{r}V^2\right)\left(= \frac{\vec{r}\cdot\vec{V}}{V^2}\vec{V} - \vec{r}\right) = \frac{\vec{V}\times(\vec{V}\times\vec{r})}{V^2}$

pe care o utilizăm în (47), obținem transformările Lorentz directe în formă vectorială

$$\begin{cases} \vec{r}\,' = \gamma(\vec{r} - \vec{V}t) + (\gamma - 1)\frac{\vec{V}\times(\vec{V}\times\vec{r})}{V^2} \\ t' = \gamma\left(t - \frac{1}{c^2}\vec{r}\cdot\vec{V}\right) \end{cases} \qquad (49)$$

Transformările Lorentz vectoriale inverse se obțin din (49) prin schimbarea $\vec{r}\,' \leftrightarrow \vec{r}$ $t' \leftrightarrow t$ și $\vec{V} \leftrightarrow -\vec{V}$, adică

$$\begin{cases} \vec{r} = \gamma(\vec{r}\,' + \vec{V}t') + (\gamma - 1)\frac{\vec{V}\times(\vec{V}\times\vec{r}\,')}{V^2} \\ t = \gamma\left(t' + \frac{1}{c^2}\vec{r}\,'\cdot\vec{V}\right) \end{cases} \qquad (50)$$

Obs: Pentru a obține cea mai generală formă a transformărilor Lorentz se aleg acum axe neparalele pentru K și K' (obținute prin rotații spațiale)

4.4.4. Cinematică relativistă. Compunerea vitezelor

Vom considera inițial transformările Lorentz speciale inverse (37) și le diferențiem. Obținem

$$\begin{cases} dx = \gamma\,(dx' + V\,dt') \\ dy = dy' \\ dz = dz' \\ dt = \gamma\left(dt' + \frac{V}{c^2}\,dx'\right) \end{cases}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \qquad (51)$$

Din (51) obținem

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma(dx' + V\,dt')}{\gamma\left(dt' + \frac{V}{c^2}\,dx'\right)} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + V}{1 + \frac{V}{c^2}\frac{dx'}{dt'}}$$

sau

$$v_x = \frac{v_x' + V}{1 + \frac{V}{c^2}v_x'} \qquad (52)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma\left(dt' + \frac{V}{c^2}\,dx'\right)} = \frac{\frac{dy'}{dt'}}{\gamma\left(1 + \frac{V}{c^2}\frac{dx'}{dt'}\right)}$$

sau

$$v_y = \frac{v_y'}{\gamma\left(1 + \frac{V}{c^2}v_x'\right)} \qquad (53)$$

și similar

$$v_z = \frac{v_z'}{\gamma\left(1 + \frac{V}{c^2}v_x'\right)} \qquad (54)$$

Constatăm că în limita nerelativistă $c \to \infty$ $(\gamma \to 1)$

$$v_x = v_x' + V, \quad v_y = v_y', \quad v_z = v_z' \qquad (55)$$

care reprezintă tocmai compunerea vitezelor din mecanica clasică.

Ex: Să considerăm un semnal luminos care se deplasează (în vid) cu (evident) viteza luminii în K' în lungul axei Ox evident $v_x' = c$, $v_y' = 0$, $v_z' = 0$. Din (52), (53) și (54) obținem

$$v_x = \frac{c + V}{1 + \frac{V}{c^2}\cdot c} = \frac{c + V}{\frac{c+V}{c}} = c, \quad v_y = 0, \quad v_z = 0$$

Am obținut, ce era de așteptat pe baza principiului constanței vitezei luminii, că viteza ~~semnalului~~ semnalului luminos este tot c și K'.

Compunerea vitezelor poate fi exprimată, și sub formă vectorială. De data aceasta diferențiem transformările Lorentz generale (50) și obținem

$$d\vec{r} = \gamma(d\vec{r}\,' + \vec{V}dt') + (\gamma-1)\frac{\vec{V} \times (\vec{V} \times d\vec{r}\,')}{V^2}$$

$$dt = \gamma\left(dt' + \frac{1}{c^2}d\vec{r}\,'\cdot\vec{V}\right) \qquad (56)$$

De aici obținem

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\gamma(d\vec{r}\,' + \vec{V}dt') + (\gamma-1)\frac{\vec{V}\times(\vec{V}\times d\vec{r}\,')}{V^2}}{\gamma\left(dt' + \frac{1}{c^2}d\vec{r}\,'\cdot\vec{V}\right)} =$$

$$= \frac{\gamma\left(\frac{d\vec{r}\,'}{dt'} + \vec{V}\right) + (\gamma-1)\frac{\vec{V}\times\left(\vec{V}\times\frac{d\vec{r}\,'}{dt'}\right)}{V^2}}{\gamma\left(1 + \frac{1}{c^2}\frac{d\vec{r}\,'}{dt'}\cdot\vec{V}\right)}$$

și în final, ținând cont că $\frac{d\vec{r}\,'}{dt'} = \vec{v}\,'$

$$\vec{v} = \frac{\vec{v}\,' + \vec{V} + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{\vec{V}\times(\vec{V}\times\vec{v}\,')}{V^2}}{1 + \frac{1}{c^2}\vec{v}\,'\cdot\vec{V}} \qquad (57)$$

Ultima relație reprezintă legea de compunere a vitezelor în mecanica relativistă.

În limita nerelativistă $c \to \infty$ și $\gamma = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \to 1$

reobținem

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V} \qquad (58)$$

<u>Considerații finale</u>

~~Pe~~ Pe baza principiului întâi al relativității restrânse legile fizicii trebuie să fie aceleași în orice sistem de referință inerțial. Cu alte cuvinte teoriile ce descriu sistemele fizice relativiste trebuie să fie invariante la transformările Lorentz, transformări ce exprimă trecerea de la un sistem de referință inerțial la altul.

Pe de altă parte transformările Lorentz o semnificația unor „rotații" în spațiul Minkowski (similar unor rotații în spațiul tridimensional Euclidian).

Am văzut de asemenea că în locul vectorului de poziție $\vec{r} \leftrightarrow (x^1, x^2, x^3) \equiv x^i$ avem acum un cuadrivector 4-dimensional de poziție $x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$, $x^0 \equiv ct$.

Aşa cum în spaţiul tridimensional introducem noţiunea de vector $\vec{A} \equiv A^i$, $i=1,2,3$, în spaţiul Minkowski introducem noţiunea de cuadrivector: A^μ, $\mu=0,1,2,3$.
La o rotaţie în spaţiul tridimensional ştim că un vector se transformă astfel $A^i \to A'^i = R^i{}_j A^j$, $R^i{}_j$ - matricea rotaţiilor (transformare ortogonală).
La o transformare Lorentz $x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$, un cuadrivector se transformă după legea
$$A^\mu \to A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu.$$
O mărime scalară poate fi obţinută ca un produs scalar a doi vectori $\vec{A}\cdot\vec{B} = A^i B_i \equiv A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$
În cazul relativist noţiunea de produs scalar este legată de metrica Minkowski $g_{\mu\nu}$.
Astfel avem $A^\mu B_\mu = A_{scalar}$ şi
$$A^\mu B_\mu = A^\mu g_{\mu\nu} B^\nu \equiv g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu =$$
$$= g_{00} A^0 B^0 + g_{11} A^1 B^1 + g_{22} A^2 B^2 + g_{33} A^3 B^3$$
$$= A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3$$

4.5. Dinamică relativistă

4.5.1. Particula relativistă liberă

Vom studia în continuare mişcarea unei particule libere (fără interacţii) în teoria relativităţii restrânse. Problema va fi abordată în cadrul formalismului Lagrangian. După cum am văzut în acest formalism un sistem dinamic este descris de acţiunea Lagrangiană S^L. Vom construi acţiunea Lagrangiană pentru particula liberă în teoria relativităţii ţinând cont de cele trei principii.
- pe baza principiului relativităţii acţiunea trebuie să fie un invariant la transformările Lorentz.
În cazul particulei libere singura construcţie posibilă

este cu ajutorul intervalului relativist (4-dimensional) ds. Trebuie precizat că acțiunea trebuie să definească de coordonate ori

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \quad (59)$$
$$= c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = c^2 dt^2 - d\vec{r}^{\,2}$$

Acțiunea trebuie construită între cele două puncte limită (bilocalitate) este

$$S = -\alpha \int_1^2 ds \quad (60)$$

Obs: trebuie precizat că de principiul constanței vitezei luminii s-a ținut cont, el fiind incorporat în deducerea transformărilor Lorentz.

În (60) α este o constantă arbitrară care urmează a fi determinată (semnul − a fost ales prin convenție, se va vedea imediat de ce).

Pentru determinarea lui α folosim principiul corespondenței. Aceasta înseamnă că în limita $c \to \infty \iff \frac{v}{c} \to 0$ trebuie reobținută teoria clasică a particulei libere.

În teoria clasică Lagrangiană avem

$$S_{clasic} = \int_{t1}^{t2} dt\, L_{clasic} = \int_{t1}^{t2} dt\, L_{cl}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) =$$
$$\equiv \int_{t1}^{t2} dt\, L_{cl}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \quad (61)$$

unde $L_{cl} = T - V = \frac{m_0 \vec{v}^{\,2}}{2} - V(\vec{r}) \equiv \frac{m_0 \dot{\vec{r}}^{\,2}}{2}$ (62)

deoarece $V(\vec{r}) = 0$ în absența interacției.

Așadar

$$S_{cl}[\vec{r}] = \int_{t1}^{t2} dt\, \frac{m_0 \dot{\vec{r}}^{\,2}}{2}, \quad \dot{\vec{r}}^{\,2} = \vec{v}^{\,2} = v^2 \quad (63)$$

Prelucrăm forma acțiunii relativiste (60) ținând cont de (59)

$$S[\vec{r}] = -\alpha \int_1^2 ds = -\alpha \int_1^2 \sqrt{c^2 dt^2 - d\vec{r}^{\,2}} = -\alpha c \int_{t1}^{t2} dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\frac{d\vec{r}^{\,2}}{dt}}$$

adică

$$S[\vec{r}] = -\alpha c \int_{t1}^{t2} dt \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{r}}^{\,2}}{c^2}}, \quad \dot{\vec{r}}^{\,2} = \vec{v}^{\,2} = v^2 \quad (64)$$

In limita vitezelor mici (principiul de corespondență)

$$\frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2} \equiv \frac{\vec{v}^2}{c^2} << 1$$

Considerăm dezvoltarea în serie Taylor a funcției $\sqrt{1-x}$ în jurul lui $x=0$ ($\Leftrightarrow x << 1$)

$$\sqrt{1-x} = \sqrt{1-x}\Big|_{x=0} + \frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-x}\right)\Big|_{x=0} \cdot x + \frac{d^2}{dx^2}\left(\sqrt{1-x}\right)\Big|_{x=0} \frac{x^2}{2!} + \dots$$

$$= 1 + \left(\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}\right)\Big|_{x=0} x + a x^2 + \dots = 1 - \frac{x}{2} + a x^2 + \dots$$

Pentru $x << 1$ $x^2 <<<< 1$ etc. și putem folosi egalitatea $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2}$

Tinând cont de aceasta avem că în limita $c \to \infty \Leftrightarrow \frac{v}{c} \to 0$

$$\sqrt{1-\frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}} \equiv \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \qquad (65)$$

Așadar

$$S[\vec{r}]\Big|_{c\to\infty} = -\alpha c \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} =$$

$$= -\alpha c \int_{t_1}^{t_2} dt \left(1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)$$

adică

$$S[\vec{r}]\Big|_{c\to\infty} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{1}{2}\frac{\alpha}{c}\vec{v}^2 - \alpha c\right) \qquad (66)$$

Ultima formă a acțiunii trebuie să coincidă cu S_{clasic}. Cum am văzut că Lagrangianul unui sistem determină aceiași dinamică, adică și ecuații de mișcare dacă este definit până la ~~derivata~~ derivata totală a unei funcții arbitrare de coordonate și timp (deci implicit o constantă în Lagrangian nu aduce contribuții la nivelul ecuațiilor de mișcare Lagrange)

Comparând (66) cu (63) avem

$$\frac{1}{2}\frac{\alpha}{c}v^2 = \frac{1}{2}m_0 v^2$$

adică

$$\alpha = m_0 c. \qquad (67)$$

Obținem astfel acțiunea pentru particula liberă în teoria relativității

$$S[\vec{r}] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = -m_0 c^2 \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}} \qquad (68)$$

în care identificăm Lagrangianul

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \equiv L(\dot{\vec{r}}) = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}} \qquad (69)$$

Determinăm acum ecuațiile de mișcare, adică ecuațiile Lagrange

$$L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)} \qquad (70)$$

Ecuațiile Lagrange sunt

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{z}} = 0 \end{cases} \qquad (71)$$

Dar $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 0$ și $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = -m_0 c^2 \dfrac{\left(-\frac{1}{c^2}\right) 2\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}} = \dfrac{m_0 \dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Similar $\dfrac{\partial L}{\partial y} = 0$, $\dfrac{\partial L}{\partial z} = 0$, $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dfrac{m_0 \dot{y}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \dfrac{m_0 \dot{y}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Ecuațiile de mișcare Lagrange (71) se scriu acum

$$\frac{d}{dt}\frac{m_0 \dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{m_0 \dot{y}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{m_0 \dot{z}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 0 \qquad (72)$$

Cele trei ecuații scalare se pot scrie într-o singură ecuație vectorială.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 \dot{\vec{r}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right) = 0 \iff \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right) = 0 \qquad (73)$$

Notația cu m_0 a masei particulei își va găsi acum sensul (m_0 fiind masa în limita clasică).
Știm că impulsul p_x conjugat coordonatei x este $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} \equiv p_x$ adică $p_x = \dfrac{m_0 \dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ (74)

Similar $\quad p_y = \dfrac{m_0 \dot{y}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad , \quad p_z = \dfrac{m_0 \dot{z}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ (75)

ultimele trei relații se scriu într-o singură formă vectorială

$$\vec{p} = \vec{i} p_x + \vec{j} p_y + \vec{k} p_z = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} (\vec{i} \dot{x} + \vec{j} \dot{y} + \vec{k} \dot{z})$$

adică

$$\vec{p} = \frac{m_0 \dot{\vec{R}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{76}$$

Vom păstra definiția impulsului din mecanica clasică $\vec{p} = m\vec{v}$, ceea ce ne conduce la noțiunea de masă relativistă

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{77}$$

Constatăm că în teoria relativității masa nu mai este constantă, ea crește cu viteza. În limita clasică $c \to \infty$ $m = m_0$. ~~De~~ De altă parte la viteze mici m rămâne aproape constantă și egală cu m_0. În ~~repaus~~ $v=0$ $m = m_0$, și de aceea m_0 se numește masă de repaus.

Observație: În teoria relativității masa nu se mai conservă. În schimb ecuațiile (73) ale mișcării se scriu pe baza definiției (76)

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \tag{78}$$

adică $\vec{p} = \overrightarrow{const}$. În consecință impulsul se poate conserva (în absența interacțiilor).

Să analizăm în continuare energia particulei relativiste libere. Am văzut că în formalismul Lagrangian dacă $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ atunci se conservă energia totală. În general energia am construit-o astfel.

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - L = p_i \dot{q}^i - L = H \tag{79}$$

În acest caz avem

$$E = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z} + m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)} \tag{80}$$

Ultima relaţie se scrie compact astfel

$$E = \vec{p}\cdot\vec{v} + m_0 c^2 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad (81)$$

Ţinând cont de expresia (76) a impulsului obţinem

$$E = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\vec{v} - c^2 m_0 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0 v^2 + m_0 c^2 - m_0 c^2 \frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

adică în final energia totală relativistă pentru particula liberă

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \equiv m c^2 \qquad (82)$$

Relaţia $E = mc^2$ este celebra relaţie a lui Einstein care leagă energia de masa relativistă.

Se constată că în limita de repaus $v=0$ $E = m_0 c^2$, adică există o energie de repaus pentru o particulă ceea ce nu există în mecanica clasică.

Se poate stabili o formă a energiei totale şi în funcţie de impuls. Folosim relaţiile (76) şi (80). Prin împărţirea lor obţinem

$$\frac{\vec{p}}{E} = \frac{\vec{v}}{c^2} \iff \vec{p} = \frac{E}{c^2}\vec{v} \iff \vec{v} = \frac{c^2}{E}\vec{p} \qquad (83)$$

Folosind acum (83) şi (82) ridicate la pătrat avem

$$E^2 = \frac{m_0 c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow E^2 - \frac{E^2}{c^2}v^2 = m_0^2 c^4 \overset{(83)}{\Longrightarrow}$$

$$E^2 - \frac{E^2}{c^2}\frac{c^4}{E^2}\vec{p}^{\,2} = m_0^2 c^4 \Rightarrow$$

$$\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2} = m_0^2 c^2 \qquad (84)$$

sau

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 \vec{p}^{\,2}}. \qquad (85)$$

Relaţia (84) se mai poate scrie introducând aşa numitul cuadrivector energie-impuls

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) \equiv \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right)$$

În (84) prelucrăm membrul stâng

$$\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2} = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) =$$

$$= p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = g_{00}\, p^0 p^0 + g_{11}\, p^1 p^1 + g_{22}\, p^2 p^2 + g_{33}\, p^3 p^3$$

$$= g_{\mu\nu}\, p^\mu p^\nu \equiv p^\mu g_{\mu\nu} p^\nu \equiv p^\mu p_\mu \quad \text{cu } p_\mu = g_{\mu\nu} p^\nu$$

Așadar relația (84) se scrie sub forma (covariantă)

$$p^\mu p_\mu = m_0^2 c^2 \tag{84}$$

$p^\mu p_\mu$ – reprezintă modulul pătrat al cuadrivectorului energie-impuls.

Remarcăm faptul că în teoria relativității o particulă care are masă de repaus $m_0 \neq 0$, nu poate atinge viteza luminii deoarece are nevoie de o cantitate infinită de energie pentru aceasta. În (82) când $v \to c$ $E \to \infty$.

Pe de altă parte dacă o particulă are masă de repaus nulă $m_0 = 0$ (există în „lumea" particulelor elementare astfel de particule, de exemplu fotonul – particula de lumină") atunci aceasta nu poate exista în repaus, ea putându-se mișca doar cu viteza luminii.

Dacă $v = c$ $\quad m_0 \overset{(82)}{=} \frac{E}{c^2}\sqrt{1-\frac{c^2}{c^2}} \equiv 0$

Cum $m_0 = 0$ pentru a exista ca entitate trebuie să aibă $E \neq 0$. Impulsul unei astfel de particule se obține din (84) pentru $m_0 = 0$ și este $|\vec{p}| = \frac{E}{c}$.

Energia cinetică a unei particule relativiste libere se determină ca diferența dintre energia sa și energia de repaus

$$T = E - E_0 = (m - m_0)c^2 = \left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0\right)c^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) m_0 c^2 \tag{85}$$

4.5.2. Particula relativistă în interacție

Vom aborda în continuare problema descrierii mișcării unei particule relativiste atunci când aceasta se află într-un câmp potențial (adică se află în interacție). Considerând un câmp potențial înseamnă că am presupus că interacția este descrisă de forțe conservative.

În formalismul Lagrangian vom avea $V(\vec{r}) \neq 0$ și deci Lagrangianul se va scrie din cel pentru particula liberă (atunci când $V(\vec{r}) = 0$). Așadar avem

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - V(\vec{r}) \qquad (86)$$

Ecuațiile de mișcare în formă generală sunt tot (72). În acest caz vom obține însă

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x} \equiv -\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x} \neq 0$$

$$\text{și} \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = -\frac{\partial V}{\partial z} \qquad (87)$$

Așadar ecuațiile Lagrange (72) se vor scrie acum

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial V}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{m_0 \dot{x}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 0 \iff -\dfrac{\partial V}{\partial x} - \dfrac{d}{dt} p_x = 0 \\ -\dfrac{\partial V}{\partial y} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{m_0 \dot{y}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 0 \iff -\dfrac{\partial V}{\partial y} - \dfrac{d}{dt} p_y = 0 \\ -\dfrac{\partial V}{\partial z} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{m_0 \dot{z}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 0 \iff -\dfrac{\partial V}{\partial z} - \dfrac{d}{dt} p_z = 0 \end{cases} \qquad (88)$$

Restrângem cele trei ecuații într-o ecuație vectorială

$$-\vec{i}\frac{\partial V}{\partial x} - \vec{j}\frac{\partial V}{\partial y} - \vec{k}\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{d}{dt}(\vec{i} p_x + \vec{j} p_y + \vec{k} p_z) = 0$$

sau

$$-\nabla V(\vec{r}) - \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \iff \frac{d\vec{p}}{dt} = -\operatorname{grad} V(\vec{r}) \qquad (89)$$

Se știe că forța este $\vec{F} = -\operatorname{grad} V(\vec{r})$ și obținem

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \qquad (90)$$

Ultima ecuație descrie mișcarea relativistă a unei particule sub acțiunea forței $\vec{F}$. Diferența de cazul clasic unde ecuația ce descrie mișcarea este ecuația lui Newton $m\cdot\vec{a}=\vec{F}$, derivă din faptul că masa nu mai este constantă

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}}\equiv m(t)$$

și atunci $\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(m(t)\vec{v}(t))=\vec{F}$

În limita clasică $c\to\infty$ $m(t)=m_0$ și

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v})=\frac{d}{dt}(m_0\vec{v})=m_0\frac{d\vec{v}}{dt}=m_0\vec{a},$$ adică $m_0\vec{a}=\vec{F}$.

Teoria poate fi extinsă la un sistem de particule relativiste

Revenind la cazul unei singure particule în interacție determinăm și energia totală a acesteia

Cum și în acest caz $\frac{\partial L}{\partial t}=0 \Rightarrow E=\text{const}$.

Dar acum

$$E=\vec{p}\cdot\vec{v}-L(\vec{r},\dot{\vec{r}})=\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\vec{v}+m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+V(\vec{r})$$

și efectuând calculele ca și în cazul anterior

$$E=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+V(\vec{r})\equiv mc^2+V(\vec{r}) \qquad (91)$$

În caz particular se poate analiza mișcarea unei particule relativiste în câmp electric și câmp magnetic ($\vec{E}$ și $\vec{B}$). În acest caz $\vec{F}=\vec{F}_e+\vec{F}_L$, unde $\vec{F}_e=q\vec{E}$ și $\vec{F}_L=q(\vec{v}\times\vec{B})$ este forța Lorentz

Ecuația (vectorială) de mișcare se scrie

$$\frac{d}{dt}\vec{p}=q\vec{E}+q(\vec{v}\times\vec{B}) \qquad (92)$$

sau $$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{p}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)=q\vec{E}+q(\vec{v}\times\vec{B}) \qquad (93)$$

În limita clasică aceasta devine: $m\vec{a}=q\vec{E}+q(\vec{v}\times\vec{B})$.

În final analizăm pe scurt două particule relativiste aflate în interacție care le menține la distanță foarte mică una de alta. Cele două particule pot fi privite ca formând împreună o nouă particulă relativistă de data aceasta considerată liberă.

Energia totală a particulei ca sistem se scrie relativist astfel

$$E = m_1 c^2 + m_2 c^2 + V_{int}$$

Privită unitar această particulă compusă este liberă și are energia

$$E = m c^2$$

Egalând cele două expresii ale energiei care se conservă obținem

$$m c^2 = m_1 c^2 + m_2 c^2 + V_{int}$$

de unde

$$m = m_1 + m_2 + \frac{V_{int}}{c^2}$$

Ultima relație ne arată că masa particulei compuse diferă de suma maselor componentelor

$$m \neq m_1 + m_2 \quad \text{(neconservare de masă)}$$

Diferența este cu atât mai pronunțată cu cât $\frac{V_{int}}{c^2}$ este mai mare. În cazul interacției nucleare tari acest termen devine suficient de semnificativ și diferența („defectul de masă") este semnificativă.

Este evident că un astfel de efect nu este observat în mecanica clasică deoarece în limita $c \to \infty$ $\left(\frac{v}{c} \to 0 \Leftrightarrow v \ll c\right)$ $\frac{V_{int}}{c^2} \to 0$

și $m = m_1 + m_2$.